Bloque 02. Tema 6.

Proporcionalidad numérica.

ÍNDICE

1.1) Magnitudes y Proporciones

Una **magnitud** es cualquier propiedad de un ente que se pueda **expresar numéricamente, por tanto medirse, es decir, compararse con un patrón.**

Son magnitudes: La longitud del lado un cuadrado o la capacidad de una botella de agua o la temperatura a la que esta está.

- **Razón**.

Se entiende por razón la relación de comparación de dos cantidades. Esta comparación la podemos hacer de dos maneras:

1. Hallando en cuanto excede una cantidad a la otra, es decir **restándose**.
2. Hallando cuántas veces contiene una cantidad a la otra, es decir, **dividiéndose.**

De aquí que haya dos clases de razones, **razón aritmética** o por diferencia y **razón geométrica** o por cociente.

- **Razón ARITMÉTICA.** Es la diferencia indicada de dos cantidades que se comparan.

  Así la razón aritmética entre 60 y 12 será 48. Pues 60-12=48

- **Razón GEOMÉTRICA.** Es el cociente entre dos cantidades de magnitudes comparables entre sí.

El antecedente es el dividendo y el consecuente es el divisor.

Así la razón geométrica entre 60 y 12 será 5. Pues $\frac{60}{12} = 5.$

Al valor de la razón se le denomina **constate de proporcionalidad** y nos referiremos a él como **k**.

Las razones geométricas las expresamos en forma de fracciones, pero al contrario que las fracciones, estas están formadas por dos cantidades independientes, el antecedente y el consecuente que no tienen por qué ser números enteros.

Si $\frac{a}{b}$ es una **fracción,** entonces es un representante de un número Racional, luego **a** y **b** son **números enteros** con **b≠0,** mientras que en la **razón** $\frac{x}{y}$ los números **x** e **y** pueden ser números no enteros.

1.1.1) Proporción aritmética

Una proporción es la **igualdad de dos razones**.

Cuando la proporción está formada por razones aritméticas hablamos de **EQUIDIFERENCIAS** o **proporción aritmética**.

Se escribe de la forma **a-b=c-d.** Leyéndose: **a** es a **b** como **c** es a **d.**

- En una equidiferencia se cumple que la suma de los términos medios es igual a la suma de los términos extremos. **a+d = c+b.**

Si nos dicen que la razón aritmética entre dos equidiferencias es 13, podríamos expresar infinitas equidiferencias que tuviesen dicha razón, una de ellas podría ser:

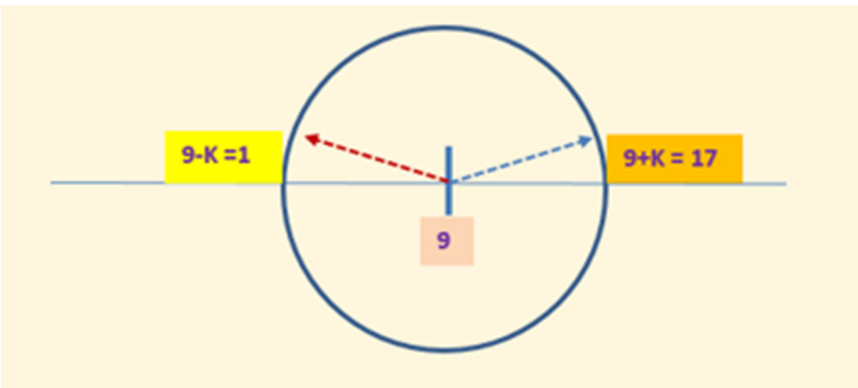
23-10 = 15-2 = k = 13

Cuando una equidiferencia tiene los números **intermedios iguales** se le denomina **continúa**. El número intermedio se dice que es **media aritmética de los números extremos**.

La siguiente proporción aritmética 17-**9** = **9**-1 es continua, por tanto el número 9 es la media aritmética de 17 y 1, luego:

$$\frac{17+1}{2} = \frac{18}{2} = 9$$

Como la constante de proporcionalidad aritmética es 8 ocurrirá que nueve es equidistante:



Ejercicio 1

¿Cuál es la razón aritmética de los números?

a) $\frac{11}{12}$ y $\frac{5}{6}$

b) 5,6 y 3,5

1.1.2) Proporción geométrica

Cuando igualamos dos **razones geométricas**, hablamos de **proporciones geométricas**.

Términos medios.

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \quad \text{ó} \quad a : b = c : d$$

Términos extremos.

Se lee: "a es a b como c es a d"

- En toda proporción geométrica, el **producto** de los términos **medios** es igual al **producto** de los términos **extremos**. Es decir:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Longrightarrow a.d = b.c$$

Si nos preguntásemos si las razones **15/20** y **3/4** forman una proporción geométrica comprobaríamos que se verifique la igualdad siguiente, por tanto:

$$k = \frac{15}{20} = \frac{3}{4} \Rightarrow 15.\ 4 = 20\ .\ 3$$

Como se cumple la igualdad, podemos decir que de dichas razones forman una proporción geométrica.

¿Pero cómo podemos caracterizar a una proporción para diferenciarla del resto?

Pues bien, cada proporción se caracterizará por su constante de proporcionalidad, que no es más que el valor que toma el cociente de la razón. Le denominaremos K.

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f} = k$$

Así, la constante de razón del ejemplo anterior será K=3/4=0,75

- En una **proporción** o en una serie de **razones iguales**, la suma de los antecedentes dividida entre la suma de los consecuentes es igual a una cualquiera de las razones.

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f} = \frac{a+c+e}{b+d+f}$$

Esta propiedad será fundamental para hablar de los repartos directa e inversamente proporcionales.

Si la aplicamos al ejemplo anterior tendríamos:

$$k = \frac{15}{20} = \frac{3}{4} = 0{,}75 = \frac{15+3}{20+4} = \frac{18}{24}$$

Ejercicio 2

Indica si las siguientes razones representan una proporción.

	V / F
$\left[\frac{3}{2}\right] = \left[\frac{9}{7}\right]$	
$\left[\frac{2}{5}\right] = \left[\frac{5}{16}\right]$	
$\left[\frac{6}{24}\right] = \left[\frac{1}{4}\right]$	
$\left[\frac{24}{6}\right] = \left[\frac{15}{4}\right]$	

1.1.2.a) Cuarto proporcional

Es uno cualquiera de los términos (**conocido o desconocido**) de una proporción geométrica.

Un ejemplo tipo seria el siguiente:

- Determina el cuarto proporcional desconocido, de las siguientes proporciones geométricas. $a)\ \frac{2}{x} = \frac{4}{10}\ ;\ b)\ \frac{x}{5} = \frac{4}{10}$

a) $\frac{2}{x} = \frac{4}{10} \longrightarrow x = \frac{2 \cdot 10}{4} \longrightarrow x = 5$

b) $\frac{x}{5} = \frac{4}{10} \longrightarrow x = \frac{5 \cdot 4}{10} \longrightarrow x = 2$

Veremos más adelante, que determinar el cuarto o la cuarta proporcional es una forma de plantear y resolver la regla de tres simple.

Ejercicio 3

Determina la cuarta proporcional de una proporción aritmética, donde sabemos que 50 es a 40 como 25 es a X.

Ejercicio 4

Determina la cuarta proporcional de una proporción geométrica, donde sabemos que 4 es a 7 como 8 es a X.

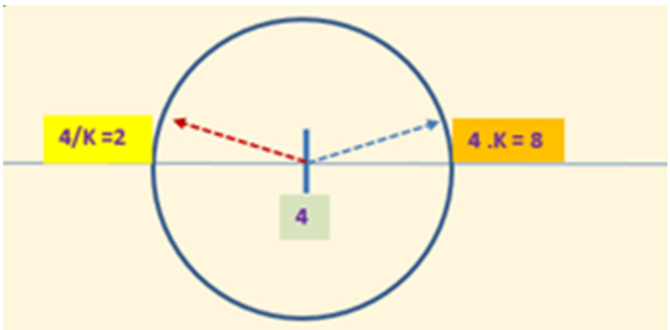
1.1.2.b) Media proporcional

Cuando una proporción tiene los **números medios iguales**, se le denomina **proporción continua**. **El número medio** representa la **media geométrica** o media proporcional de los números extremos.

$$\frac{8}{4}=\frac{4}{2} \Rightarrow$$ Por tanto **4** es media proporcional de 2 y 8

Por lo que podemos decir que: $\mathbf{4^2 = 2.8 = 16}$.

Como la constante de proporcionalidad es K=2, podríamos poner:



Para calcular el medio proporcional de una proporción continua se extrae **la raíz cuadrada del producto de los extremos**.

$$\frac{3}{x}=\frac{x}{12} \rightarrow x^2 = 3 \cdot 12 \rightarrow x = \pm\sqrt{36} \rightarrow x = \pm 6$$

Ejercicio 5

Determina una proporción continua que tenga como media proporcional 6

Ejercicio 6

Determinar la media de la proporción aritmética que tiene como extremos 81 y 4

Ejercicio 7

Determina la media proporcional de la proporción geométrica de extremos 81 y 4

1.1.2.c) Tercero proporcional

En una **proporción continua**, **como los términos medios son iguales,** se denomina tercero proporcional a cada uno de los términos desiguales.

Un tercero proporcional es igual al cuadrado de los términos iguales, dividido por el término desigual.

$$\frac{x}{6} = \frac{6}{12} \longrightarrow x = \frac{6^2}{12} = 3$$

Ejercicio 8

Hallar la tercera proporcional de 8 y 2.

$$\frac{8}{2} = \frac{2}{X} \Rightarrow X.8 = 4 \Rightarrow X = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$$

1.2) Magnitudes directamente proporcionales. Proporcionalidad directa

Dos variables **(x, y)** relacionadas en un mismo fenómeno, son directamente **proporcionales**, cuando

- al aumentar de valor una aumenta de valor la otra Si $x\uparrow \leftrightarrow y\uparrow$
- O si la primera disminuye, disminuye la segunda. $x\downarrow \leftrightarrow y\downarrow$

Cuando ocurre esa relación se verificará que: $\frac{y}{x} = k$ es decir, el cociente (división) entre los valores respectivos de cada una de las variables es constante.

Veamos la siguiente propuesta:

Indica si las magnitudes siguientes son directamente proporcionales

- **La longitud del lado de un cuadrado y su perímetro**

  Respuesta: **Sí**, porque a mayor longitud de sus lados mayor perímetro. (Si una variable aumenta la otra aumenta en la misma razón)

- **El número de trabajadores y los días que se demoran en hacer un trabajo, si todos trabajan de igual manera:**

  Respuesta: **No**, porque a mayor cantidad de trabajadores menos cantidad de días. (Si una variable aumenta, la otra disminuye en la misma razón)

En el caso de las magnitudes relacionadas mediante una proporcionalidad directa, dicha relación se puede representar como: **y= k.X,** a la que denominamos **función lineal.** Donde:

x se le denomina variable independiente.

y se le denomina variable dependiente.

K constante de proporcionalidad.

Por ejemplo si tenemos la siguiente función: **y = 3 x**. la constante de proporcionalidad sería 3.

Nos indica que por cada unidad que aumentemos la variable x, se aumenta en tres unidades la variable y.

¿Cómo se calcula la constante de proporcionalidad conociendo relaciones entre dos magnitudes?

Como $y = k\,x$ entonces $\longrightarrow k = y / x$

Calcula la constante de proporcionalidad de los valores de la tabla siguiente:

x	3	6	7
y	6	12	14

$$k = \frac{y}{x} = \frac{6}{3} = \frac{12}{6} = \frac{14}{7} = 2$$

Analicemos el siguiente ejemplo: **Juan ha utilizado 20 huevos para hacer 4 tortillas iguales.**

a) ¿Cuántos huevos necesita para hacer 6 tortillas?

b) ¿Y para hacer 2?

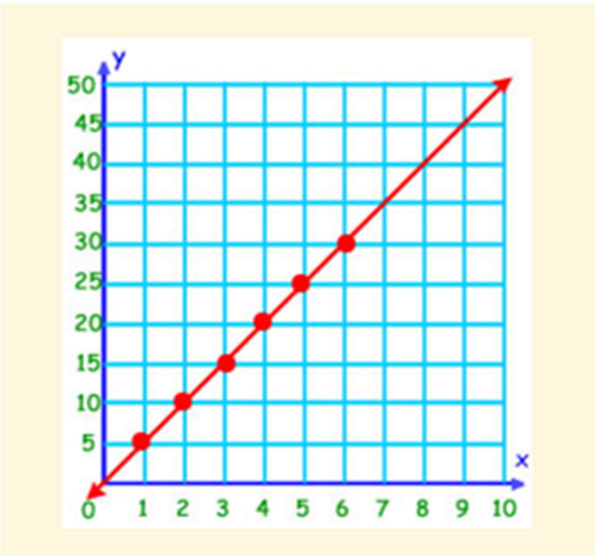
Como las tortillas tienen todas la misma cantidad de huevos, podríamos rellenar la siguiente tabla:

número de tortillas→ X	1	**2**	3	**4**	5	**6**
número de huevos →Y	5	10	15	**20**	25	30

Si llevamos sobre un sistema de **ejes cartesianos**[1] las parejas de valores (x,y) del ejemplo anterior, vemos que estos puntos no se sitúan aleatoriamente en la representación, sino que configuran una línea recta que pasa por el origen del sistema de referencia, punto (0,0).

Así pues, el gráfico que corresponde a una relación de proporcionalidad directa **es una línea recta** que pasa por el origen de un sistema de coordenadas cartesianas.

Además si nos fijamos en la tabla, podemos darnos cuenta que el cociente (división) entre las dos magnitudes (y / x) es constante y representa la constante de proporcionalidad de la relación. En este caso el valor de la constante de proporcionalidad es **5.**



[1] Ejes cartesianos. Cada una de las rectas reales graduadas que se cortan perpendicularmente dividiendo al plano en cuatro cuadrantes.

Ejercicio 8

Indica en qué casos las magnitudes que aparecen son directamente proporcionales: Contesta Si o No.

	Si / No
a) La velocidad de un vehículo y la distancia que recorre en dos horas.	
b) El coste de un lápiz y la cantidad de lápices que se pueden comprar con 10 euros.	
c) La distancia recorrida y el tiempo que se tarda en recorrerla.	
d) El número de litros de agua que contiene un depósito y su peso.	
e) La edad de una persona y su estatura.	

1.3) Magnitudes inversamente proporcionales. Proporcionalidad inversa

Dos variables **(x, y)** relacionadas en un mismo fenómeno, son inversamente proporcionales, cuando

- al **aumentar** de valor una de ellas **disminuye** el valor de la otra Si $X \uparrow \leftrightarrow Y \downarrow$
- O si la primera **disminuye**, **aumenta** la segunda. $X \downarrow \leftrightarrow Y \uparrow$

Cuando ocurre lo anterior se verifica que **(** $x \cdot y = k$ **) , es decir** el producto entre los valores respectivos de cada una de las variables es constante.

Esta relación de proporcionalidad inversa se puede representar como una función de la forma: $y = k / x$, donde:

x se le denomina variable independiente.
y se le denomina variable dependiente.
K constante de proporcionalidad inversa.

Analicemos el siguiente ejemplo:

Indica si la relación entre las variables dadas son o no inversamente proporcionales.

a) El número de albañiles y el tiempo empleado en hacer una construcción edificio.

Respuesta: **Son inversamente proporcionales**, ya que con el doble, triple... número de albañiles se tardará la mitad, tercera parte de tiempo en construir el mismo edificio.

b) La velocidad de un automóvil y el trayecto recorrido en el mismo tiempo.

Respuesta: **Son inversamente proporcionales** ya que a tiempo constante, con el doble o el triple... de la velocidad, el automóvil recorrerá el doble, triple... de espacio.

c) La velocidad de un automóvil y el tiempo empleado en recorrer el mismo trayecto.

Respuesta: **Son inversamente proporcionales,** ya que, a espacio constante, con el doble, triple... velocidad, el auto tardará la mitad, tercera parte... de tiempo en recorrerlo.

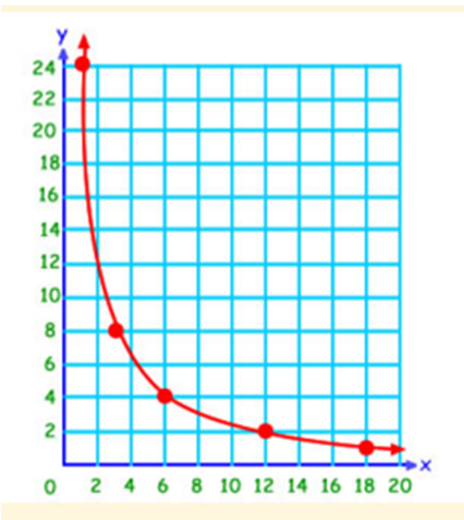
- **Gráfico de proporcionalidad inversa.**

La tabla siguiente representa a los diferentes valores de las variables en una relación inversa.

x	3	6	12	1
y	8	4	2	24

Si representamos sobre un sistema de coordenadas cartesianos dichos valores los puntos representativos forman una curva, llamada **hipérbola**.

Esta gráfica es indicativa de que entre las variables hay una relación de proporcionalidad inversa.



Ejercicio 9

Indica en cuáles de las siguientes situaciones, las magnitudes que aparecen son inversamente proporcionales:

	Si / No
a) El tiempo que trabaja una persona y el salario que recibe.	
b) Número de trabajadores en una obra y tiempo que tardan en terminarla.	
c) Velocidad de un vehículo y tiempo empleado en recorrer una distancia.	
d) Precio de un artículo e importe del IVA.	
e) Longitud de una circunferencia y de su diámetro.	
f) Número de vacas en un establo y tiempo para el que tienen alimento.	

2) Comparación de dos o más magnitudes en proporción geométrica

2.1. Regla de tres simple directa

Tenemos dos magnitudes representadas por las variables **A** y **B**, que sabemos por las medidas que expresan sus cantidades que están relacionadas de manera directamente proporcional (***a más de A, más de B***).

Bajo este supuesto, si conociésemos tres cantidades de las magnitudes **A** y **B**, podríamos determinar una cuarta cantidad relacionada con las anteriores.

Analicemos el siguiente ejemplo:

Sabemos que 4 libros cuestan 8 €, nos gustaría saber cuánto nos costarían 15 libros del mismo tipo.

Tenemos dos magnitudes representada por las variables: **A → número de libros.**

B → coste de los libros.

De esas variables conocemos tres cantidades: $\mathbf{A_1=4}$, $\mathbf{B_1=8}$, $\mathbf{A_2=15}$.

Deseamos conocer una cuarta cantidad relacionada con las anteriores $\mathbf{B_2=X}$

Podríamos hacer el siguiente planteamiento:

Datos o Supuesto:	**4 libros**	→	**8 €**
Pregunta:	**15 libros**	→	**X €**

Esta forma de plantear el problema se le llama regla de tres simple directa y vamos a ver que hay tres formas de enfrentar su solución:

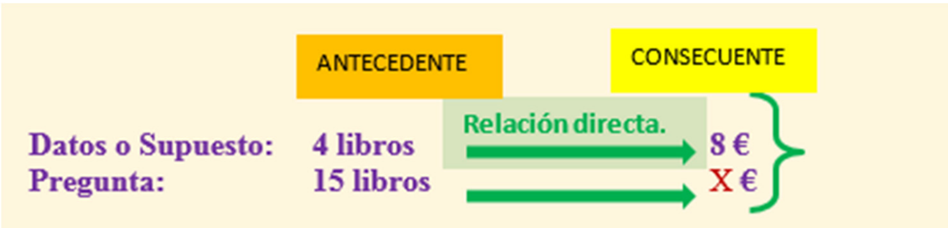
- **Método de reducción a la unidad**.
  Si 4 libros cuestan 8 euros, un libro constará cuatro veces menos, es decir, un libro costará 8/4 = 2 €, por tanto 15 libros costarán 15 veces más que un libro solo, es decir, 2.15=**30€**, que sería la respuesta buscada.

- **Método de las proporciones.**
  Como a más libros adquiridos pagaremos más, las dos magnitudes representadas por las variables **A** y **B** son directamente proporcionales.
  La constante de razón (k) de las cantidades homogéneas (*de la misma variable*) son iguales, luego podremos igualar las razones, quedándonos:

$$k = \frac{4}{15} = \frac{8}{X}$$

$$\text{Resolviendo tendremos: } 4.X = 15.8 \rightarrow X = \frac{120}{4} = 30\ €$$

- **Método comparativo**.
  Comparamos la relación que hay entre las cantidades de la magnitud conocida y la magnitud donde se encuentre la incógnita.
  Si la relación es de **proporcionalidad directa** entonces **igualaremos los cocientes**, si **fuese inversa** lo que igualaríamos serían los productos de las cantidades relacionadas.



$$\frac{8}{4} = \frac{X}{15} \Rightarrow X = \frac{15.8}{4} = \frac{120}{4} = 30$$

<u>Resolvamos juntos el siguiente supuesto</u>:

Un automóvil a velocidad constante recorre 240 km en 3 horas. ¿Cuántos kilómetros habrá recorrido en 2 horas?

Las dos magnitudes en juego, **distancia** y **tiempo** para una <u>misma velocidad</u>, con dos medidas cada una, son magnitudes **directamente proporcionales**, ya que **a menos** horas recorrerá **menos** kilómetros y a más horas recorrerá más kilómetros.

Luego podremos hacer el siguiente planteamiento:

		Relación directa.	
Datos o Supuesto:	**3 horas**	→	240 km
Pregunta:	**2 horas**	→	X km

Como tenemos una relación directamente proporcional podemos igualar las constantes de razón de las magnitudes relacionadas o lo que es lo mismo, el cociente de las cantidades de esas magnitudes y poner:

$$\frac{240}{3} = \frac{X}{2} \quad \Rightarrow \quad X = \frac{240.2}{3} = \frac{480}{3} = 160\ km$$

__**Ejercicio 10**__

En 50 litros de agua de mar hay 1.300 gramos de sal. ¿Cuántos litros de agua de mar contendrán 5.200 gramos de sal?

__**Ejercicio 11**__

Un automóvil gasta 5 litros de carburante cada 100 km. Si quedan en el depósito 6 litros, ¿cuántos kilómetros podrá recorrer el automóvil?

2.2) Regla de tres simple inversa

Tenemos dos magnitudes representadas por las variables **A** y **B**, que sabemos por las medidas que expresan sus cantidades que están relacionadas de manera inversamente proporcional (***a más de una, menos de la otra***).

Bajo este supuesto, si conociésemos tres cantidades de las magnitudes **A** y **B**, podríamos determinar una cuarta cantidad relacionada con las anteriores.

Analicemos juntos el siguiente ejemplo:

Cuatro grifos iguales, llenan un depósito en **14 horas** ¿Cuánto tardarían en rellenar el mismo depósito si tuviésemos **siete** grifos en vez de cuatro?

Tenemos dos magnitudes representada por las variables: **A → número de grifos.**
B → horas abiertos.

De esas variables conocemos tres cantidades: $\mathbf{A_1=4}$, $\mathbf{B_1=14}$, $\mathbf{A_2=7}$.

Deseamos conocer una cuarta cantidad relacionada con las anteriores $\mathbf{B_2=X}$. (Que es la pregunta del enunciado.)

Podríamos hacer el siguiente planteamiento:

Datos o Supuesto:	**4 grifos**	→	**14 horas abiertos.**
Pregunta:	**7 grifos**	→	**X horas abiertos**

Esta forma de plantear el problema se le llama regala de tres simple, porque **solo hay dos magnitudes relacionadas** e, **inversa**, puesto que si la cantidad de una de las magnitudes crece, la lógica y la intuición nos dice que la cantidad de la otra magnitud decrecerá.

Como en el caso anterior hay tres formas de enfrentar su solución, veámoslas a través del siguiente ejemplo:

- **Método de reducción a la unidad.**

  Si cuatro grifos tardan en llenar el depósito 14 horas, un grifo solo tardará en hacerlo cuatro veces más, es decir **4.14 = 56 horas, de** la misma forma que **7** grifos lo harían en **un tiempo de siete veces menos,** es decir**, 56/7=8 horas.**

  Eso es, 7 grifos tardarían en llenar el depósito 8 horas, **menos tiempo que tardaban los cuatro grifos iniciales**.

- **Método de las proporciones.**

  Como a más grifos abiertos tardaremos menos en llenar el depósito, las dos magnitudes representadas por las variables **A** y **B** son inversamente proporcionales.

  La constante de razón (**k**) de las cantidades homogéneas (*de la misma variable*) ahora no son iguales, sino que una es la inversa de la otra, luego para igualar las razones deberemos invertir el antecedente y el consecuente de cualquiera de las razones.

$$\left.\begin{array}{l}\text{Razón de la magnitud grifos: } k_A = \frac{4}{7} \\ \\ \text{Razón de la magnitud horas: } k_B = \frac{14}{X}\end{array}\right\} \text{Pero resulta que: } k_A = \frac{1}{k_B} \text{ o } k_B = \frac{1}{k_A}$$

  Luego igualando las razones a las que representan dichas constantes tendríamos:

$$\frac{4}{7} = \frac{1}{\frac{14}{X}} \Longrightarrow \frac{4}{7} = \frac{X}{14} \Longrightarrow \text{Por tanto } 4.(14) = 7.\,X$$

- **Método comparativo.**

  Comparamos la relación que hay entre las cantidades de la magnitud conocida y la magnitud **donde se encuentre la incógnita**.

  Si la relación es de proporcionalidad **inversa** entonces igualaremos los productos de las cantidades relacionadas (de *la misma variable*), estableciendo una igualdad entre el supuesto y la pregunta.

<u>Resolvamos juntos el siguiente ejemplo</u>:

3 obreros construyen un muro en 12 horas, ¿cuánto tardarán en construirlo 6 obreros?

El número de obreros y el tiempo que tardan en hacer la construcción, son magnitudes **inversamente proporcionales**, ya que a **más** obreros tardarán **menos** horas.

Datos o Supuesto: 3 obreros → 12 horas**.**

Pregunta: 6 obreros → **X horas.**

Si tres obreros tardan 12 horas, **un obrero solo** tardará tres veces más, es decir, 3.(12)= 36 h. Pero si en vez de un obrero **trabajasen 6**, evidentemente tardaría seis veces menos en hacer la obra, por tanto:

X=36.h/6= 6 h.

Es decir, 6 obreros realizarían el muro en 6 horas, frente a las 12 h que tardaría 3 obreros.

Ejercicio 12

Un grifo que mana 18 l de agua por minuto tarda 14 horas en llenar un depósito. ¿Cuánto tardaría si su caudal fuera de 7 l por minuto?

Ejercicio 13

Si 4 obreros construyen un muro en 12 horas, ¿cuánto tardarán en construirlo 6 obreros?

2.3) Regla de tres compuesta directa, inversa y mixta

La **reglas de tres compuestas** se emplea cuando se relacionan **tres o más magnitudes**, de modo que a partir de las relaciones establecidas entre las cantidades de las magnitudes conocidas obtenemos **la desconocida**.

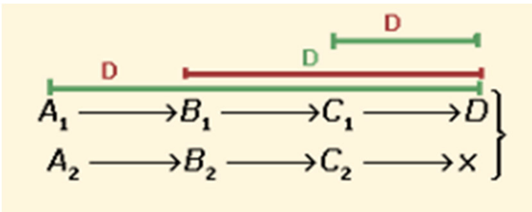
Una **regla de tres compuesta** se compone de varias **reglas de tres simples** aplicadas sucesivamente.

La relación entre las magnitudes puestas en juego podrá ser todas directas, todas inversas o mixtas, es decir, unas directas y otras inversas.

Para no alargar el tema, utilizaremos el método comparativo. Siempre compararemos las magnitudes puestas en juego con la magnitud en la que se encuentra la **cantidad buscada (incógnita),** determinando de esta forma **si la relación es directa o inversa**. Esta magnitud la consideraremos que es el consecuente del problema, siendo el resto de magnitudes el antecedente del mismo.

- **Regla de tres compuesta y directa.**

Señalamos con una " **D** " **(directa)** la relación que existe entre los antecedentes (**A,B,C)** y el consecuente **(D**).



Por ser la relación directa entre las magnitudes participantes, plantearemos la siguiente igualdad entre las razones de los antecedentes y de los consecuentes.

$\frac{A_1}{A_2} \cdot \frac{B_1}{B_2} \cdot \frac{C_1}{C_2} = \frac{D}{x}$ despejando adecuadamente la variable resulta: $x = \frac{A_2 \cdot B_2 \cdot C_2 \cdot D}{A_1 \cdot B_1 \cdot C_1}$

Analicemos el siguiente ejemplo:

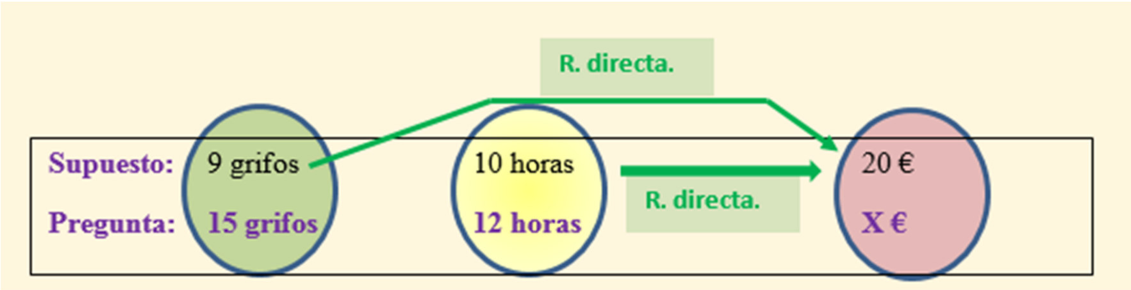
Nueve grifos abiertos durante 10 horas diarias han consumido una cantidad de agua por valor de 20 €. Averiguar el precio del vertido de 15 grifos abiertos 12 horas durante los mismos días.

Tenemos tres magnitudes en juego:
A. número de grifos.
B. número de horas abiertos.
C. coste del vertido.

Como el dato buscado está sobre la variable **C** "**coste del vertido**", esta actuará como consecuente del planteamiento del problema y el resto de variables se compararán con ella para determinar la relación existente.

A se relaciona con **C** de manera **directamente proporcional** (más grifos más coste).

B se relaciona con **C** de manera **directamente proporcional** (más horas vertiendo más coste).



Por tanto multiplicando las razones de los antecedentes e igualándolas a la razón del consecuente no quedaría:

$$\frac{9}{15}\cdot\frac{10}{12}=\frac{20}{x} \Longrightarrow \frac{90}{180}=\frac{20}{x}$$

Y despejando resulta: $x=\dfrac{20\cdot 180}{90}=40\,€$

- **Regla de tres compuesta inversa.**

Señalamos con una “I“ (inversa) la relación que existe entre los antecedentes (A, B, C) y el consecuente (D).

$$\left.\begin{array}{l} A_1 \longrightarrow B_1 \longrightarrow C_1 \longrightarrow D \\ A_2 \longrightarrow B_2 \longrightarrow C_2 \longrightarrow x \end{array}\right\} \Longrightarrow \frac{A_2}{A_1}\cdot\frac{B_2}{B_1}\cdot\frac{C_2}{C_1}=\frac{D}{x} \Longrightarrow x=\frac{A_1\cdot B_1\cdot C_1\cdot D}{A_2\cdot B_2\cdot C_2}$$

Lo que significa que la cantidad buscada en una relación en la que todas sus magnitudes están relacionadas de manera inversamente proporcional será igual al producto de los antecedentes partido por el producto de los consecuentes.

Analicemos el siguiente ejemplo:

5 obreros trabajando 6 horas diarias construyen un muro en 2 días. ¿Cuánto tardarán 4 obreros trabajando 7 horas diarias?

Tenemos tres magnitudes en juego:

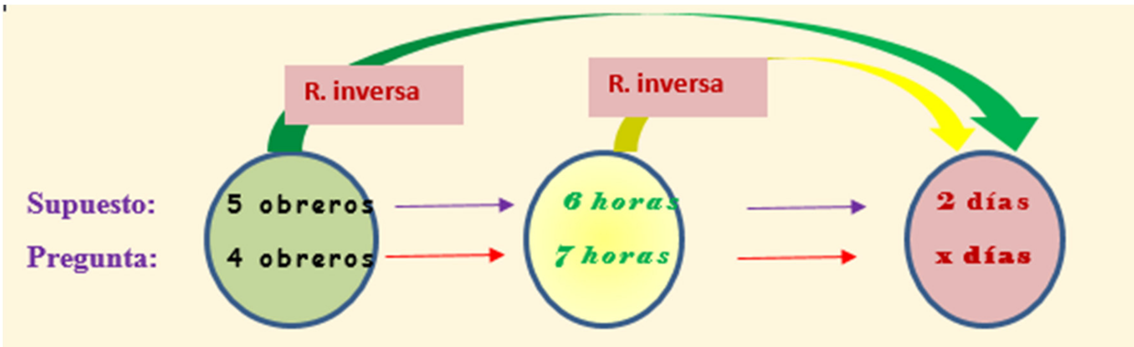
A. número de obreros.
B. número de horas de trabajo diarias
C. duración de la obra.

Como el dato buscado está sobre la variable C “**duración de la obra**”, esta actuará como consecuente del planteamiento del problema. El resto de variables se compararán con ella para determinar la relación existente.

A se relaciona con **C** de manera **inversamente** proporcional (**más obreros menos duración**).

B se relaciona con **C** de manera **inversamente** proporcional (**más horas diarias menos duración**).

Hacemos el siguiente planteamiento:



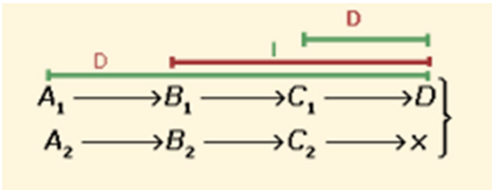
Como la relación es inversamente proporcional invertiremos las razones de los antecedentes y los igualaremos a la razón del consecuente sin invertir, para seguidamente despejar el valor buscado.

$$\frac{4}{5}\cdot\frac{7}{6}\cdot=\frac{2}{X} \quad \Rightarrow \quad x=\frac{30}{28}.2=2{,}14 \text{ dias}$$

- **Regla de tres compuesta mixta.**

Aparece cuando en un problema nos encontramos variables que respecto al consecuente actúan de modo directamente proporcional, mientras que otras actúan de manera inversamente proporcional.

Supongamos el siguiente planteamiento donde las magnitudes guardan con el consecuente la relación indicada:



Multiplicaremos las razones de los antecedentes invirtiendo las mismas cuando la relación sea inversa. El resultado lo igualaremos a la razón del consecuente.

<u>Analicemos el siguiente ejemplo</u>:

Si 8 obreros realizan en 9 días trabajando a razón de 6 horas por día un muro de 30 m. ¿Cuántos días necesitarán 10 obreros trabajando 8 horas diarias para realizar los 50 m de muro que falta?

Tenemos tres magnitudes en juego:

A. número de obreros.
B. número de horas de trabajo diarias.
C. metros construidos.
D. días de trabajo.

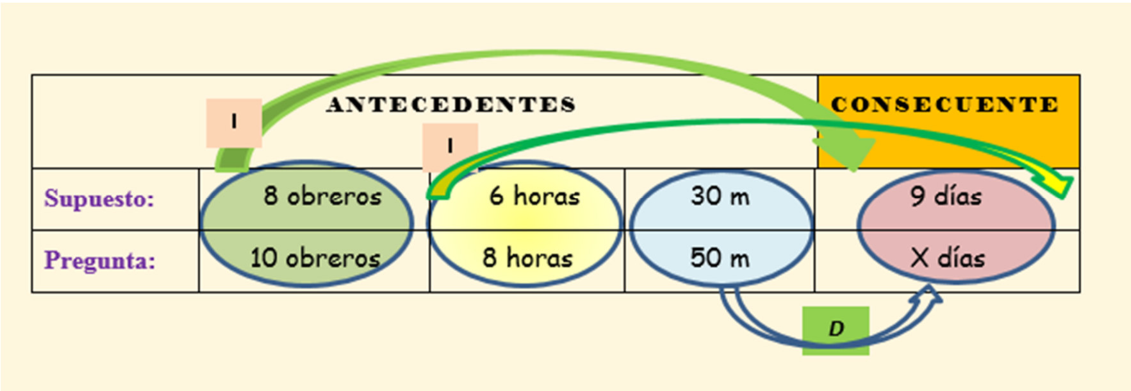
Como el dato buscado está sobre la variable D "**duración de la obra**", esta actuará como consecuente del planteamiento del problema. El resto de variables se compararán con ella para determinar la relación existente.

A se relaciona con **D** de manera **inversamente** proporcional (**más obreros, menos duración**).

B se relaciona con **D** de manera **inversamente** proporcional (**más horas diarias, menos duración**).

C se relaciona con **D** de manera **directamente** proporcional (**más construcción, más duración**).

Hacemos el siguiente planteamiento:



Igualando las razones de los antecedentes con la razón del consecuente, invirtiendo aquellas razones que están en proporción inversa resulta:

$$\frac{10}{8}\cdot\frac{8}{6}\cdot\frac{30}{50}=\frac{9}{x} \Rightarrow 1=\frac{9}{x} \Rightarrow x=9$$

Luego 10 obreros trabajando 8 horas diarias realizarán un muto de 50 m en 9 días.

<u>**Ejercicio 14**</u>

En un mapa de escala 1:200.000 la distancia entre dos puntos es de 15 cm. ¿Cuál es la distancia en la realidad?

<u>**Ejercicio 15**</u>

En una fábrica 6 máquinas iguales producen en 2 horas 600 piezas. ¿Cuántas piezas producirán 9 de estas máquinas en 3 horas?

3) Repartos

En las reglas de tres simples o compuestas estudiadas anteriormente, comparábamos las cantidades de dos o más magnitudes para hallar **un valor o una cantidad** de alguna de las magnitudes puestas en juego.

Ahora el problema, aunque se sustenta en el concepto visto anteriormente de proporción va a consistir en encontrar **diferentes razones** que tengan **la misma constante de razón**, en lo que se va a llamar **repartos**, que podrán ser **directamente proporcionales**, **inversamente proporcionales** o **mixtos.**

3.1) Repartos directamente proporcionales

Consiste en repartir una cantidad dada entre varios partes de tal manera, que cada elemento del reparto reciba una cierta cantidad del total, la cual será directamente proporcional a alguna característica que se tome como referencia entre las partes.

Sea **N** una cantidad a repartir por ejemplo en **n** partes, de manera directamente proporcional a una característica de esas partes (edad, altura, peso etc..) representadas por los números $\mathbf{a_1, a_2, a_3 .... a_n}$.

Cada una de las partes recibirá del total **N**, las cantidades: $\mathbf{c_1, c_2, c_3 ... c_n}$.

El reparto se va a caracterizar porque las constantes de razón entre la cantidad recibida ($\mathbf{c_i}$) y la característica que da lugar al reparto ($\mathbf{a_i}$) son iguales, es decir:

$$k = \frac{c_1}{a_1},\ k = \frac{c_2}{a_2},\ k = \frac{c_3}{a_3} \dots\dots\dots\ k = \frac{c_n}{a_n}$$

Luego podemos igualar esas razones.

$$k = \frac{c_1}{a_1} = \frac{c_2}{a_2} = \frac{c_3}{a_3} \dots\dots \frac{c_n}{a_n}$$

Pero como vimos al comienzo del tema, en una **proporción** o en una serie de **razones iguales**, la suma de los antecedentes dividida entre la suma de los consecuentes es igual a una cualquiera de las razones. **Por tanto:**

$$\frac{\mathbf{c_1 + c_2 + c_3 + \cdots + c_n}}{a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n} = \frac{N}{A} = \frac{c_1}{a_1} = \frac{c_2}{a_2} = \frac{c_3}{a_3} \dots\dots = \frac{c_n}{a_n}$$

Conociendo esta igualdad calcular cualquier valor del reparto es fácil, pudiéndose utilizar cualquiera de las relaciones expuestas.

$$\frac{C_i}{a_i} = \frac{N}{A} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{C_i = \frac{N.a_i}{A}}$$

$$i = 1 \dots\dots\dots n$$

Donde: $\mathbf{A = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n}$ **y** $\mathbf{N = C_1 + C_2 + C_3 + \ldots + C_n}$

Analicemos este ejemplo:

Un abuelo reparte 450 € entre sus tres nietos de 8, 12 y 16 años de edad, proporcionalmente a sus edades. ¿Cuánto corresponde a cada uno?

Llamamos **x, y, z** a las cantidades que le corresponde a cada uno.

1º El reparto es directamente proporcional luego: $\frac{x}{8} = \frac{y}{12} = \frac{z}{16}$

2º Por la propiedad de las razones iguales: $\frac{x}{8} = \frac{y}{12} = \frac{z}{16} = \frac{x+y+z}{8+12+16} = \frac{450}{36}$

3º Cada nieto recibirá:

$$\begin{cases} \frac{x}{8} = \frac{450}{36} & x = \frac{450 \cdot 8}{36} = 100\ € \\ \frac{y}{12} = \frac{450}{36} & y = \frac{450 \cdot 12}{36} = 150\ € \\ \frac{z}{16} = \frac{450}{36} & z = \frac{450 \cdot 16}{36} = 200\ € \end{cases}$$

Ejercicio 16

Compramos un lote de libros por 162 euros. Víctor se quedó con 7 libros, Belén con 5 y Jaime con 6. ¿Cuánto debe pagar cada uno?

La cantidad que debe pagar cada uno son proporcionales al número de libros que se quedó.

$a_{Víctor}$ =7; $a_{Belén}$ =5; a_{Jaime} =6. por tanto A=7+5+6=18 y la cantidad total pagada N=162=C_{victor}+$C_{Belén}$+C_{Jaime} €.

C_{victor} = (162.7)/18 = 63

$C_{Belén}$ = (162.5)/18 = 45

C_{Jaime} = (162.6)/18 = 54

3.2) Repartos inversamente proporcionales

Consiste en repartir una cantidad dada entre varios partes de tal manera, que cada elemento del reparto reciba una cierta cantidad del total, la cual será **inversamente proporcional** a alguna característica que se tome como referencia para realizar el reparto entre las partes.

Realizar un reparto inversamente proporcional es lo mismo que realizar un reparto directamente proporcional al valor inverso de la característica de reparto.

Sea **N** una cantidad a repartir por ejemplo en **n** partes de manera **inversamente** proporcional a una característica de esas partes (edad, altura, peso etc..), representadas por los números $a_1, a_2, a_3....a_n$.

Cada una de las partes recibirá del total **N**, las cantidades: $c_1, c_2, c_3...c_n$, las cuales serán de valor inverso a la característica de reparto (***más característica***, ***menor trozo de N***).

El reparto se va a caracterizar en este caso, porque las constantes de razón entre la cantidad recibida (C_i) y la **inversa de la característica** que da lugar al reparto (**a_i**) son iguales, es decir:

$$\boxed{k=\frac{c_1}{\frac{1}{a_1}},\ k=\frac{c_2}{\frac{1}{a_2}},\ k=\frac{c_3}{\frac{1}{a_3}}\ldots\ldots\ldots\ k=\frac{c_n}{\frac{1}{a_n}}}$$

Luego podremos igualar esas razones.

$$\boxed{k=\frac{c_1}{\frac{1}{a_1}}=\frac{c_2}{\frac{1}{a_2}}=\frac{c_3}{\frac{1}{a_3}}\ldots..=\frac{c_n}{\frac{1}{a_n}}}$$

Pero como vimos al comienzo del tema, en una **proporción** o en una serie de **razones iguales**, la suma de los antecedentes dividida entre la suma de los consecuentes es igual a una cualquiera de las razones. **Por tanto:**

$$\frac{c_1+c_2+c_3+\cdots+c_n}{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\frac{1}{a_3}+\cdots+\frac{1}{a_n}}=\frac{N}{A}=\frac{c_1}{\frac{1}{a_1}}=\frac{c_2}{\frac{1}{a_2}}=\frac{c_3}{\frac{1}{a_3}}\ldots..=\frac{c_n}{\frac{1}{a_n}}$$

Donde:

$c_1+c_2+c_3+\cdots+c_n=N$ Representa cada una de las partes del reparto.

$\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\frac{1}{a_3}+\cdots+\frac{1}{a_n}=A$ Representa la suma de los inversos de las características del reparto.

Conociendo esta igualdad calcular cualquier valor del reparto es fácil, pudiéndose utilizar cualquiera de las relaciones expuestas.

$$\boxed{\frac{C_i}{\frac{1}{a_i}}=\frac{N}{A}} \Rightarrow \boxed{C_i=\frac{N}{A.a_i}\quad i=1,\ldots,n}$$

Analicemos el siguiente ejemplo:

Tres hermanos ayudan al mantenimiento familiar entregando anualmente 5900 €. Si sus edades son de 20, 24 y 32 años y las aportaciones son inversamente proporcionales a la edad, ¿cuánto aporta cada uno?

Como hemos dicho el reparto inversamente proporcional lo resolvemos como un reparto directamente proporcional a los inversos de las características del reparto. Por tanto.

1º Tomamos los inversos: $\frac{1}{20}, \frac{1}{24}, \frac{1}{32}$

2º Ponemos a común denominador: $\frac{24}{480}, \frac{20}{480}, \frac{15}{480}$

3º Y como los numeradores de las fracciones reducidas a común denominador guardan la relación de proporcionalidad de la originales, realizamos un reparto directamente proporcional a los numeradores: **24, 20 y 15.**

$$\frac{x}{24} = \frac{y}{20} = \frac{z}{15} = \frac{x+y+z}{24+20+15} = \frac{5900}{59}$$

$$\frac{x}{24} = \frac{5900}{59} \qquad x = \frac{5900 \cdot 24}{59} = 2400 \text{ €}$$

$$\frac{y}{20} = \frac{5900}{59} \qquad y = \frac{5900 \cdot 20}{59} = 2000 \text{ €}$$

$$\frac{z}{15} = \frac{5900}{59} \qquad z = \frac{5900 \cdot 15}{59} = 1500 \text{ €}$$

Como podemos observar en el resultado, el de menor edad aporta más dinero que el hijo de mayor edad.

Ejercicio 17

Una persona decide repartir la cantidad de 4.400 euros entre 3 niños. El reparto ha de efectuarse en partes inversamente proporcionales a sus edades, que son 4, 8 y 12 años. ¿Cuánto corresponderá a cada uno?

3.3) Repartos sobre dos o más características. Repartos compuestos

Este tipo de reparto se realiza proporcional mente a varios grupos de índices o características que afectan a los elementos del reparto.

Los repartos proporcionales compuestos pueden ser:

- ***DIRECTOS:*** Si el reparto se realiza en partes directamente proporcionales a los índices.
- ***INVERSOS:*** Si el reparto se realiza en partes inversamente proporcionales a los índices.
- ***MIXTOS:*** Si el reparto se realiza en partes directamente proporcionales a algunos índices e inversamente proporcionales a otros.

Para efectuar un reparto compuesto se siguen los siguientes pasos:

1º) Se convierte las relaciones que haya inversamente proporcionales a directas invirtiendo los índices del reparto.

2º) Se multiplican los índices correspondientes de cada grupo, obteniéndose de esta manera un único índice de reparto.

3º) Se efectúa el reparto de manera directamente al índice resultante.

Veamos cada uno de los casos con un ejemplo.

- **Repartos compuestos directos**

Una institución educativa va a repartir 15.000 € entre los tres mejores estudiantes seleccionados de una ciudad. La distribución del premio se hará en **proporción directa** a la **nota media** y a las **asignaturas cursadas**.

José tiene una nota media de 9,75 y 22 materias acreditadas, Patricia tiene una nota media de 9,86 y 19 materias acreditadas y Ricardo tiene promedio de 9,03 y 31 materias acreditadas, ¿cuánto le corresponde a cada uno?

Hay un reparto directamente proporcional a dos características o índices: **Nota media** y Asignaturas cursadas.

- Calculamos el índice compuesto que le corresponde a cada elemento del reparto multiplicando para ello los factores directos de las diferentes características de reparto.

Nombre:	Factor notas	Factor Asignaturas	Índice compuesto
José	9,75	22	214,5
Patricia	9,86	19	187,34
Ricardo	9,03	31	279,93

- Procedemos a realizar el reparto directo a los índices compuestos hallados, así.

$$\frac{\text{José}}{214,5}=\frac{\text{Patricia}}{187,34}=\frac{\text{Ricardo}}{279,93}=\frac{15.000\ €}{214,5+187,34+279,93}=\frac{15.000\ €}{681,77}$$

Nombre:	Factor notas	Factor Asignaturas	Índice compuesto	Cantidad Recibida.
José	9,75	22	214,5	$214,5 \cdot \frac{15.000\ €}{681,77} = 4719,34$
Patricia	9,86	19	187,34	$187,34 \cdot \frac{15.000\ €}{681,77} = 4121,77$
Ricardo	9,03	31	279,93	$279,93 \cdot \frac{15.000\ €}{681,77} = 6158,89$
Total Repartido.				15000 €

- **Repartos Compuestos indirectos**

Se repartió un premio de 8.750 € entre tres tele operadores de una empresa en proporción inversa a los clientes perdidos y a los errores cometidos. Juan perdió 12 clientes y tuvo cuatro errores, Ana perdió nueve clientes y tuvo 2 errores y Carmen perdió dos clientes y tuvo 10 errores ¿Cuánto le correspondió a cada uno?

- Hay un reparto inversamente proporcional a dos características o índices: **Clientes perdidos** y **errores cometidos**.
- Calculamos el índice que le corresponde a cada elemento del reparto invertido el factor de reparto original, para proceder seguidamente a multiplicarlos para obtener así el índice de reparto compuesto para los diferentes miembros del reparto.

  Reducimos las fracciones a común denominador y utilizamos el denominador de las mismas para determinar el índice compuesto.

  mcm (48,18,20)= 720.

Nombre:	FACTORES.		Índice compuesto
	Clientes	Asignatura	
Juan	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{12}\cdot\frac{1}{4}=\frac{1}{48}=\frac{15}{720}$
Ana	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{9}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{18}=\frac{40}{720}$
Carmen	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{10}=\frac{1}{20}=\frac{36}{720}$

- Procedemos a realizar el reparto directo a los índices compuestos hallados, así:

$$\frac{\text{Juan}}{15}=\frac{\text{Ana}}{40}=\frac{\text{Carmen}}{36}=\frac{15.000\ €}{15+40+36}=\frac{8\,750\ €}{91}$$

Nombre:	FACTORES.		Índice compuesto	Cantidad Recibida.
	Clientes	Asignatura		
Juan	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{4}$	15	$15.\frac{8\,750\ €}{91} = 1442{,}31$
Ana	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{2}$	40	$40.\frac{8\,750\ €}{91} = \mathbf{3846}{,}15$
Carmen	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{10}$	36	$36.\frac{8\,750\ €}{91} = 3461{,}54$
Total Repartido.				8750 €

- **Compuestos mixtos**

La junta de Castilla la Mancha va a gratificar a cuatro docentes con 12000 € de manera directamente proporcional a los años de servicios e inversamente proporcional al número de días de baja que han tenido en esos años.

El profesor A, tiene 25 años de servicio y 20 días de baja. El profesor B tiene 32 años de servicios y 120 días de baja. El profesor C tiene 34 años de servicio y 365 días de baja.

¿Cuál será la cantidad que recibirá cada uno?

- Hay un reparto mixto. Atendiendo a una característica el reparto es directamente proporcional (**años de servicio**), pero atendiendo a los días de baja el reparto es **inversamente proporcional**.
- Procederemos calculando el índice del reparto compuesto tras haber invertido el factor que representaría al reparto inversamente proporcional.

Nombre:	FACTORES.		Índice compuesto
	Años Servicio	Bajas	
A	25	$\frac{1}{20}$	$\frac{25}{20} = \frac{10950}{8760}$
B	32	$\frac{1}{120}$	$\frac{32.}{120} = \frac{2336}{8760}$
C	34	$\frac{1}{365}$	$\frac{34}{365} = \frac{816}{8760}$

m.c.m (20,120,365)= 8760

- Procedemos a realizar el reparto directo a los índices compuestos hallados, así:

$$\frac{A}{10950} = \frac{B}{2336} = \frac{C}{816} = \frac{12000€}{10950 + 2336 + 816} = \frac{12000€}{14102}$$

Nombre:	FACTORES.		Índice compuesto	Cantidad Recibida.
	Clientes	Asignatura		
A	25	$\frac{1}{20}$	10950	$10950 \frac{12000\text{ €}}{14102} = 9317{,}83$
B	32	$\frac{1}{120}$	2336	$2336 . \frac{12000\text{ €}}{14102} = 1987{,}80$
C	34	$\frac{1}{365}$	816	$816 \frac{12000€}{14102} = 694{,}37$
Total Repartido.				12000 €

Ejercicio 18

Se reparten 1200 puntos entre tres niños de manera proporcional a su edades de 10,12,16 años e inversamente proporcional al número de amonestaciones impuestas en el campeonato que ha sido 2,1,2 y al número de faltas a los entrenamientos que fueron respectivamente de 12, 14,8.

¿Determinar los puntos que le corresponde a cada uno de los niños?

4) Ratios. Porcentajes y descuentos

Si acudimos al diccionario se define **Ratio** como una voz femenina que significa **Relación** cuantificada entre dos magnitudes que refleja su proporción, es decir, la **Razón** de dos magnitudes relacionadas.

Esta palabra es muy utilizada en el mundo económico queriendo expresar con ella una Relación cuantitativa entre dos fenómenos que refleja una situación concreta de rentabilidad, de nivel de inversiones, etc. Los ratios son indicadores que permiten comparaciones interempresariales.

Supongamos que tenemos un bote de pintura, y denominamos "**a**" a la cantidad de colorante que contiene y por "**b**" la cantidad de pintura total.

Podríamos entonces decir que **la ratio** (proporción) colorante, pintura para sacar nuestro color favorito será:

Ratio (color/pintura)=**a**/**b**

Pero podría interesarnos saber cuántas partes de colorante debemos echar por **una** parte de pintura.

A la expresión obtenida le vamos a llamar: **tanto por uno** (tantas parte de colorante por una de pintura). Lo expresamos con el símbolo **1/1**.

$$\frac{a}{b}=\frac{\frac{a}{b}}{\frac{b}{b}}=\frac{\frac{a}{b}}{1}$$

Tanto por uno (1/1)

Pero si ahora tuviésemos un bote con 100 partes de pintura la porción de colorante sería:

$$\frac{a}{b}=\frac{\frac{a}{b}}{1}\cdot\frac{100}{100}=\frac{\frac{a}{b}\cdot 100}{100}=\frac{a}{b}\cdot 100\%$$

Es decir, multiplicaríamos el tanto por uno correspondiente (**a**/**b**) por 100.

Esta ratio es muy usado como referencia, hablándose de una proporción en tanto por ciento. Tantas partes de colorante por cien partes de pintura. Lo expresamos con el símbolo **%**.

De la misma manera podríamos expresar la proporción en **tantos por mil**, en **tantos por diez mil** (*puntos básicos)* en **partes por millón,** etc, indicando cada proporción con un sufijo determinado, **‰, 0/000, ppm.**

4.1) Porcentajes y descuentos

Es frecuente el uso en el entorno cotidiano de proporciones expresadas como porcentajes, que reciben nombres particulares según el contexto, pero cuyo fundamento matemático, su operatividad es la misma.

Cuando nos piden el porcentaje de cierta cantidad, nos están pidiendo que determinemos la cuarta proporcional de la igualdad entre dos razones.

Si nos dicen: ¿Cuánto será el 23% de 1750 €?

Podríamos establecer la siguiente igualdad de razones, donde X va a representar al término desconocido:

$$\boxed{\frac{23}{100} = \frac{X}{1750}} \Longrightarrow \boxed{X = \frac{23.1750}{100} = 402{,}5\ €}$$

- ***Podemos encontrarnos que los porcentajes hallados tengamos que sumarlos al principal, por ejemplo cuando añadimos el I.V.A al precio de un artículo, en este caso el procedimiento seguido sería:***

$$\text{PAGAMOS} = \text{Precio} + X\,\%\,(\text{Precio}) = \text{Precio} + \frac{x}{100}.\ \text{Precio} = \text{Precio}\ .\ (1+\frac{x}{100}) = \text{Precio}.(1+ X\,\%)$$

Analicemos el siguiente ejemplo:

El precio de un ordenador es de 1200 € sin IVA. ¿Cuánto hay que pagar por él si el IVA es del 16%?

Un procedimiento largo nos llevaría a realizar las siguientes operaciones:

El porcentaje del IVA (impuesto sobre el valor añadido) será una cantidad a añadir al precio, calculemos dicha cantidad.

$$\frac{16}{100} = \frac{X\ €}{1200\ €} \Longrightarrow X = \frac{(16).1200}{100} = 192€$$

Luego pagaremos= 1200 € + 192 € =1392 €

Por el procedimiento corto utilizando la expresión deducida más arriaba, tendríamos:

Pagaremos = 1200 € .(1+0,06)=1200.(1,06) = **1272 €**

- ***Podemos encontrarnos que a los porcentajes hallados tengamos que restarlos del principal, por ejemplo cuando nos hacen un descuento.***

  En estos casos podemos aplicar el siguiente procedimiento que nos facilita el cálculo.

$$\text{PAGAMOS} = \text{Precio} - x\,\%.(\text{Precio}) = \text{Precio} - \frac{x}{100}.\text{Precio} = \text{Precio}.(1 - \frac{x}{100}) = \text{Precio}.(1 - x\,\%)$$

Veamos el siguiente ejemplo:

Al adquirir un vehículo cuyo precio es de 8800 €, nos hacen un descuento del 7,5%. ¿Cuánto hay que pagar por el vehículo?

Método largo

$$\frac{\text{Descuento}}{8800\ €} = \frac{7{,}5}{100} \Longrightarrow \textit{Descuento} = \frac{(7{,}5).8800\ €}{100} = 660€$$

Método corto

$$\text{PAGAMOS} = \text{Precio} - x\,\%\,(\text{Precio}) = \text{Precio}.(1 - 0{,}x)$$

$$\text{PAGAMOS} = 8800\ €.(1 - 0{,}075) = 8800\ €(0{,}925) = 8140\ €$$

Ejercicio 19

El 60% de los empleados de una empresa llegan al trabajo en autobús. Si el número total de empleados es 1.200, ¿cuántos llegan en autobús?

Ejercicio 20

En una votación participan 300 personas. ¿Qué tanto por ciento de los votos obtuvo un candidato que fue votado por 60 personas?

Ejercicio 21

Lourdes tiene un depósito bancario de 4000 € que le da un 4% anual. ¿Qué interés le produce su capital al final de año? ¿Y en 5 años?

5) Para saber más

Cuando realizamos una operación bancaria suelen intervenir las siguientes cantidades:

- **Capital**: Cantidad de dinero que se deposita o se solicita al banco. Se representa por **c.**
- **Tipo de interés o rédito**: Dinero que paga el banco (o cobra) por cada 100 euros. Se representa por **r**.
- **Interés**: Cantidad de dinero que paga el banco (o cobra) por el capital que hemos depositado (o solicitado). Se representa por **i.**
- **Tiempo**: Número de días, meses o años que permanece el capital en el banco. Se representa por **t**.

El importe del interés **i** que produce una cantidad de dinero viene dado por la fórmula:

$$i = \frac{c.r.t}{100} = 160\ €$$

En la anterior fórmula, si el tiempo viene expresado en meses, el denominador se multiplica por 12 y pasa a ser 1200. Si el tiempo viene expresado en días, el denominador se multiplica por 365 y pasa a ser 36500.

ENLACES DE INTERÉS

***Para saber más*:**

Puedes acceder a esta página donde se trata este apartado:

http://descartes.cnice.mec.es/materiales_didacticos/Proporcionalidad_lbc/magdirectprop.htm

Para saber más:

Puedes acceder a esta página donde se trata este apartado:

http://descartes.cnice.mec.es/materiales_didacticos/proporcionalidad_numerica/proporcionalidad1.htm

Para saber más:

Puedes acceder a esta página donde se trata este apartado:

http://descartes.cnice.mec.es/materiales_didacticos/Proporcionalidad_lbc/repdirectprop.htm

Para saber más:

Puedes acceder a esta página donde se trata este apartado:

http://descartes.cnice.mec.es/materiales_didacticos/Porcentajes_e_indices/porcentaje.htm

Para saber más:

Puedes acceder a estas páginas donde se trata este apartado:

http://descartes.cnice.mec.es/materiales_didacticos/Porcentajes_e_indices/porcentaje.htm#2

http://www.librosvivos.net/smtc/homeTC.asp?TemaClave=1171

AUTOEVALUACIÓN

22) Selecciona de las siguientes expresiones la que representa una proporción correcta.

	$\frac{4}{3}=\frac{12}{37}$
	$\frac{14}{13}=\frac{42}{39}$
	$\frac{17}{7}=\frac{81}{35}$

23) Selecciona la respuesta correcta entre las soluciones que se proponen sobre la cuarta proporcional:

	$\frac{X}{6}=\frac{10}{15}\Longrightarrow X=4$
	$\frac{9}{4}=\frac{X}{6}\Longrightarrow X=14$
	$\frac{4}{14}=\frac{10}{X}\Longrightarrow X=30$

24) Indica si es Verdadera o Falsa la siguiente proposición:

La razón de las alturas de dos árboles es igual a la de las sombras que proyectan.

Si la sombra de un ciprés es 30 metros y la de un pino de 4 m de altura, su sombra de 2 m., ¿será la altura del ciprés de 60 metros?

25) Cuál de las siguientes proposiciones es verdadera.

Un ganadero tiene 300 ovejas y tiene pienso para poderlas alimentar durante 90 días. Compra 150 ovejas más. ¿Dispondrá de pienso para alimentarlas a todas durante 70 días?	
Tres amigos aportan 18 euros cada uno para la compra de un regalo a otro. Si se añaden seis amigos más para hacerle el mismo regalo, ¿tendrán que pagar 5 euros cada uno?	
Un grifo echa 20 litros de agua por minuto y tarda en llenar un depósito una hora y 30 minutos. Si disponemos de un grifo que echa 30 litros de agua por minuto, ¿tardará en llenar el mismo depósito una hora?	

26) Selecciona la respuesta correcta entre las siguientes proposiciones.

La capacidad del pantano de Buendía es de 1600 hm^3. Si nos dicen que está al 12% de su capacidad, ¿tendrá 200 hm^3 embalsados?	
La factura de dos meses de luz de una familia es de 150 euros, a falta de añadir el 16% de IVA. ¿Será el importe total de la factura de 185 euros?	
Cañamares un pueblo de la sierra conquense ha aumentado en verano el número de habitantes en un 150%. Si en verano tiene 750 habitantes, ¿será su población fija de 500 habitantes?	

27) Si como antaño, una persona depositara 2400 euros en un banco con un interés anual del 6%, cuánto dinero tendría al cabo de un año sumando el rendimiento al capital principal.

Tendría un rendimiento de 144 €	
Tendría un rendimiento de 144 € que sumado al principal da un capital de 2544€	
Volvería a tener 2400 €, pues habría que tener en consideración las comisiones bancarias que son altas	

28) Por el trabajo realizado con una cosechadora se han cobrado 4480 euros. En la cosechadora han trabajado tres operarios de la siguiente forma: el operario A ha trabajado 14 horas; el operario B, 18 horas, y el operario C, 24 horas. Si hicieron un reparto directamente proporcional a las horas trabajadas, el resultado hubiese sido:

El operario A recibió 1440 €; el operario B, 1120 €, y el operario C, 1920 €	
El operario A recibió 1120 €; el operario B, 1440 €, y el operario C, 1920 €	
El operario A recibió 1120 €; el operario B, 14400 €, y el operario C, 1920 €	

29) Dos camareros de un bar se reparten un bote con 126 euros de propinas, de forma inversamente proporcional al número de días que han faltado. Luis ha faltado 3 días y Pedro, 5 días. ¿Qué cantidad es la que recibirá cada uno?

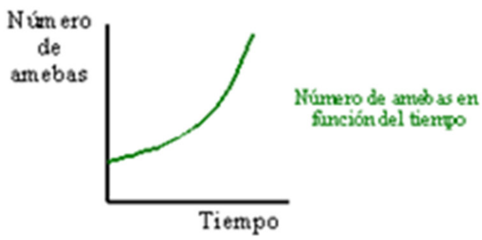
Decidieron que Luis debía recibir 68 euros, y Pedro 58	
La respuesta correcta sería que Luis debiera recibir 79 euros, y Pedro 47	
O quizás sería mejor que Luis recibiera 78,75 € y Pedro 47,75 €	

30) Indica cuál de las siguientes propuestas es verdadera:

Tres máquinas en 6 horas revelan 750 fotografías. Si ahora disponemos de 7 máquinas trabajando 9 horas, ¿podremos revelar 2800 fotografías?	
Tres grifos iguales llenan un depósito de 10 m^3 en 5 horas. Se estropea un grifo y debemos llenar un depósito de 8 m^3. ¿Podremos hacerlo en 6 horas?	
Con 12 kg de pienso, 9 conejos comen durante 6 días. Si ahora sólo tenemos 8 kg de pienso para 4 conejos, ¿los podremos alimentar durante 10 días?	

31) Las siguientes gráficas muestran la relación entre pares de magnitudes. ¿Cuáles corresponden a una relación directamente proporcional?

☐ 

☐ 

☐ 

Ejercicios resueltos

Ejercicio 1

¿Cuál es la razón aritmética de los números?

$a)\ \frac{11}{12}\ y\ \frac{5}{6}$

b) 5,6 y 3,5

$$a)\ k=\frac{11}{12}-\frac{5}{6}=\frac{11}{12}-\frac{10}{12}=\frac{1}{12}$$

$$b)\ k=5{,}6-3{,}5=2{,}5$$

Ejercicio 2

Indica si las siguientes razones representan una proporción.

	V / F
$[\frac{3}{2}]=[\frac{9}{7}]$	F
$[\frac{2}{5}]=[\frac{5}{16}]$	V
$[\frac{6}{24}]=[\frac{1}{4}]$	V
$[\frac{24}{6}]=[\frac{15}{4}]$	F

Ejercicio 3

Determina la cuarta proporcional de una proporción aritmética, donde sabemos que 50 es a 40 como 25 es a X.

Como la proporción es aritmética estableceremos la siguiente igualdad de razones.

50-40 = 25- x

Por tanto 10 = 25-x, luego x = 25-10 =15.

Por tanto el cuarto número de la proporción aritmética dada será el 15.

Así podremos decir que 50 es a 40 como 25 es a 15.

Ejercicio 4

Determina la cuarta proporcional de una proporción geométrica, donde sabemos que 4 es a 7 como 8 es a X.

Como sabemos que se trata de una proporción geométrica estableceremos la siguiente igualdad de razones que nos permitirá mediante la adecuada manipulación algebraica, conocer el cuarto término de la proporción.

$$\frac{4}{7}=\frac{8}{X} \Rightarrow 4.\ X = 8.\ 7 \Rightarrow X=\frac{8.7}{4}=14$$

Ejercicio 5

Determina una proporción continua que tenga como media proporcional 6

Si la proporción es continua, el término medio será 6, por tanto los números extremos buscados deberán cumplir: $6^2 = 36 = x.y$

Si hacemos la descomposición factorial de 36= $2^2.3^2$ Una solución buscada podría ser x= 2 e y=16.

Así la proporción continua podría ser: $\frac{18}{6}=\frac{6}{2}$

Ejercicio 6

Determinar la media de la proporción aritmética que tiene como extremos 81 y 4

Como nos piden el valor medio de la proporción significa que esta es continua y como es aritmética, estableceremos la siguiente igualdad:

$$81-X = X- 4;\ \text{luego: } X=\frac{81++4}{2}=\frac{85}{2}=42{,}5$$

Luego la proporción aritmética sería de 81 es a 42,5 como 43,5 es a 4

Ejercicio 7

Determina la media proporcional de la proporción geométrica de extremos 81 y 4

$$\frac{81}{X}=\frac{X}{4} \Rightarrow X^2=(81).4=324 \Rightarrow X=\sqrt{324}=18$$

Ejercicio 8

Indica en qué casos las magnitudes que aparecen son directamente proporcionales: Contesta Si o No.

	Si / No
a) La velocidad de un vehículo y la distancia que recorre en dos horas.	**Si**
b) El coste de un lápiz y la cantidad de lápices que se pueden comprar con 10 euros.	**No**
c) La distancia recorrida y el tiempo que se tarda en recorrerla.	**Si**
d) El número de litros de agua que contiene un depósito y su peso.	**Si**
e) La edad de una persona y su estatura.	**No**

Ejercicio 9

Indica en cuáles de las siguientes situaciones, las magnitudes que aparecen son inversamente proporcionales:

	Si / No
a) El tiempo que trabaja una persona y el salario que recibe.	**No**
b) Número de trabajadores en una obra y tiempo que tardan en terminarla.	**Si**
c) Velocidad de un vehículo y tiempo empleado en recorrer una distancia.	**Si**
d) Precio de un artículo e importe del IVA.	**No**
e) Longitud de una circunferencia y de su diámetro.	**No**
f) Número de vacas en un establo y tiempo para el que tienen alimento.	**Si**

Ejercicio 10

En 50 litros de agua de mar hay 1.300 gramos de sal. ¿Cuántos litros de agua de mar contendrán 5.200 gramos de sal?

Si representamos por x el número de litros que contendrá 5200 gramos de sal, y formamos la siguiente tabla:

Litros de agua	X	50
Gramos de sal	1.300	5.200

Se verifica la proporción: $\frac{X}{5200} = \frac{50}{1300}$

Resolviendo la igualdad nos queda: $X = \frac{50.(5200)}{1300} = 200\ l$

Ejercicio 11

Un automóvil gasta 5 litros de carburante cada 100 km. Si quedan en el depósito 6 litros, ¿cuántos kilómetros podrá recorrer el automóvil?

Si hubiese consumido un litro solo hubiese hecho cinco veces menos kilómetros ($\frac{100}{5}$), pero si gastase seis litros, recorrería seis veces más kilómetros que con un solo litro, luego:

$$X = \frac{100}{5}.6 = 120\ km$$

Ejercicio 12

Un grifo que mana 18 l de agua por minuto tarda 14 horas en llenar un depósito. ¿Cuánto tardaría si su caudal fuera de 7 l por minuto?

Hay dos magnitudes (litros y tiempo) que son **inversamente** proporcionales, ya que **a menos** litros por minuto tardará **más** en llenar el depósito.

Por ser inversamente proporcionales, las constantes de razón de las cantidades de cada magnitud, son inversas, luego para establecer una igualdad entre ellas, deberemos invertir cualquiera de las razones establecidas.

Caudal, (l)	18	7
Tiempo.(h)	14	X

$k_l = \frac{18}{7}$ $k_h = \frac{14}{X}$ ➡ $k_l = \frac{1}{k_h}$ ➡ $\frac{18}{7} = \frac{X}{14}$ ➡ $X = \frac{18}{7}.14 = 36\ h$

Ejercicio 13

Si 4 obreros construyen un muro en 12 horas, ¿cuánto tardarán en construirlo 6 obreros?

Son magnitudes **inversamente proporcionales**, ya que **a más** obreros tardarán **menos** horas.

Ejercicio 14

En un mapa de escala 1:200.000 la distancia entre dos puntos es de 15 cm. ¿Cuál es la distancia en la realidad?

1º) Hay que establecer la equivalencia de la escala:

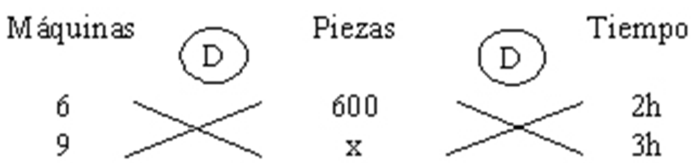
1 cm en el mapa equivalen a 200.000 cm en la realidad; es decir a 2 km.

2º) Y ahora planteamos la regla de tres:

Ejercicio 15

En una fábrica 6 máquinas iguales producen en 2 horas 600 piezas. ¿Cuántas piezas producirán 9 de estas máquinas en 3 horas?

El planteamiento es: si aumentamos el número de máquinas, la cantidad de piezas producidas en un cierto tiempo, aumentará, por ello la relación es Directa, a su vez, tenemos las mismas máquinas trabajando más tiempo, se producirán más piezas, luego la relación también es directa.



Ahora establecemos la igualdad de las proporciones. En uno de los miembros la magnitud donde está la incógnita, y en el otro el producto de las razones. Al ser las dos directas, se escriben las razones sin invertir:

$$\frac{6}{9}.\frac{2}{3}=\frac{600}{x}\Rightarrow\frac{12}{27}=\frac{600}{x}\Rightarrow x=\frac{600.27}{12}=1350\,piezas$$

Luego producirán **1350 piezas.**

Ejercicio 16

Compramos un lote de libros por 162 euros. Víctor se quedó con 7 libros, Belén con 5 y Jaime con 6. ¿Cuánto debe pagar cada uno?

La cantidad que debe pagar cada uno son proporcionales al número de libros que se quedó.

$a_{Víctor}=7$; $a_{Belén}=5$; $a_{Jaime}=6$. por tanto A=7+5+6=18 y la cantidad total pagada $N=162=C_{victor}+C_{Belén}+C_{Jaime}$ €.

C_{victor} = (162.7)/18 = 63

$C_{Belén}$ = (162.5)/18 = 45

C_{Jaime} = (162.6)/18 = 54

Ejercicio 17

Una persona decide repartir la cantidad de 4.400 euros entre 3 niños. El reparto ha de efectuarse en partes inversamente proporcionales a sus edades, que son 4, 8 y 12 años. ¿Cuánto corresponderá a cada uno?

Los números inversos a las edades son: 1/4; 1/8; y 1/12. Reduciendo estas fracciones a común denominador, resulta:

6/24; 3/24 y 2/24

Ahora de lo que se trata es de hacer el reparto directamente proporcional a los numeradores. Cuya suma es 6+3+2=11

Con lo cual el reparto quedará:

C_4=(4.400.6)/11= 2400 €

C_8=(4.400.3)/11= 1200 €

C_{12}=(4.400.2)/11= 800 €

Ejercicio 18

Se reparten 1200 puntos entre tres niños de manera proporcional a su edades de 10,12,16 años e inversamente proporcional al número de amonestaciones impuestas en el campeonato que ha sido 2,1,2 y al número de faltas a los entrenamientos que fueron respectivamente de 12, 14,8.

¿Determinar los puntos que le corresponde a cada uno de los niños?

- Hay un reparto mixto. Atendiendo a una característica el reparto es directamente proporcional (edad), pero atendiendo a las amonestaciones y a los días que han faltado a los entrenamientos el reparto es inversamente proporcional.
- Procederemos calculando el índice del reparto compuesto tras haber invertido los factores que representarían al reparto inversamente proporcional.

Nombre:	FACTORES.			Índice compuesto
	Edad	Amonestaciones	Faltas	
A	10	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{10}{24} = \frac{2.240}{5.376}$
B	12	$\frac{1}{1}$	$\frac{1}{14}$	$\frac{12}{14} = \frac{4.608}{5.376}$
C	16	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{16}{16} = \frac{5.376}{5.376}$

5.376 --> Múltiplo de 12,14 y 16

- Procedemos a realizar el reparto directo a los índices compuestos hallados, así:

$$\frac{A}{2.240} = \frac{B}{4.608} = \frac{C}{5.376} = \frac{1.200 \text{ Ptos}}{2.240 + 4.608 + 5.376} = \frac{1.200 \text{ Ptos}}{12.224}$$

Nombre:	FACTORES.			Índice compuesto	Puntos recibidos
	Edad	Amonestaciones	Faltas		
A	10	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{10}{24} = \frac{2.240}{5.376}$	(2.240 * 1.200)/12.224 = 219,89 Puntos
B	12	$\frac{1}{1}$	$\frac{1}{14}$	$\frac{12}{14} = \frac{4.608}{5.376}$	(4.608 * 1.200)/12.224 = 452,36 Puntos
C	16	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{16}{16} = \frac{5.376}{5.376}$	(5.376 * 1.200)/12.224 = 527,75 Puntos

Puntos totales repartidos: 1.200 Puntos

Ejercicio 19

El 60% de los empleados de una empresa llegan al trabajo en autobús. Si el número total de empleados es 1.200, ¿cuántos llegan en autobús?

Planteamos la siguiente regla de tres:

Porcentaje		Empleados
Si el 100%	son	1200
el 60%	serán	x

$$X = \frac{1200.60}{100} = 720$$

Ejercicio 20

En una votación participan 300 personas. ¿Qué tanto por ciento de los votos obtuvo un candidato que fue votado por 60 personas?

Planteamiento de la regla de tres:

Porcentaje		Personas
Si el 100%	son	300
x %	serán	60

$$X = \frac{100.60}{300} = 20\ \%$$

Ejercicio 21

Lourdes tiene un depósito bancario de 4000 € que le da un 4% anual. ¿Qué interés le produce su capital al final de año? ¿Y en 5 años?

Que el tipo de interés sea del 4% significa que de cada 100 € que Lourdes tiene en el depósito bancario, la entidad le da 4 € al año. Por los 4000 € le dará el 4%, esto es:

$$\mathbf{X} = \frac{4000.4}{100} = \mathbf{160\ €}$$

En cinco años le producirá 5 veces esa cantidad, es decir: 5. 160 € =800 €

22) Selecciona de las siguientes expresiones la que representa una proporción correcta.

	$\frac{4}{3} = \frac{12}{37}$
X	$\frac{14}{13} = \frac{42}{39}$
	$\frac{17}{7} = \frac{81}{35}$

23) Selecciona la respuesta correcta entre las soluciones que se proponen sobre la cuarta proporcional:

X	$\frac{X}{6}=\frac{10}{15}\Longrightarrow X=4$
	$\frac{9}{4}=\frac{X}{6}\Longrightarrow X=14$
	$\frac{4}{14}=\frac{10}{X}\Longrightarrow X=30$

24) Indica si es Verdadera o Falsa la siguiente proposición:

La razón de las alturas de dos árboles es igual a la de las sombras que proyectan.

Si la sombra de un ciprés es 30 metros y la de un pino de 4 m de altura, su sombra de 2 m., ¿será la altura del ciprés de 60 metros?

La respuesta es falsa, los cipreses no son tan altos, en este caso su altura es de 15 m.

25) Cuál de las siguientes proposiciones es verdadera.

	V / F
Un ganadero tiene 300 ovejas y tiene pienso para poderlas alimentar durante 90 días. Compra 150 ovejas más. ¿Dispondrá de pienso para alimentarlas a todas durante 70 días?	
Tres amigos aportan 18 euros cada uno para la compra de un regalo a otro. Si se añaden seis amigos más para hacerle el mismo regalo, ¿tendrán que pagar 5 euros cada uno?	
Un grifo echa 20 litros de agua por minuto y tarda en llenar un depósito una hora y 30 minutos. Si disponemos de un grifo que echa 30 litros de agua por minuto, ¿tardará en llenar el mismo depósito una hora?	**V**

26) Selecciona la respuesta correcta entre las siguientes proposiciones.

La capacidad del pantano de Buendía es de 1600 hm^3. Si nos dicen que está al 12% de su capacidad, ¿tendrá 200 hm^3 embalsados?	
La factura de dos meses de luz de una familia es de 150 euros, a falta de añadir el 16% de IVA. ¿Será el importe total de la factura de 185 euros?	
Cañamares un pueblo de la sierra conquense ha aumentado en verano el número de habitantes en un 150%. Si en verano tiene 750 habitantes, ¿será su población fija de 500 habitantes?	**X**

27) Si como antaño, una persona depositara 2400 euros en un banco con un interés anual del 6%, cuánto dinero tendría al cabo de un año sumando el rendimiento al capital principal.

Tendría un rendimiento de 144 €	
Tendría un rendimiento de 144 € que sumado al principal da un capital de 2544€	**X**
Volvería a tener 2400 €, pues habría que tener en consideración las comisiones bancarias que son altas	

28) Por el trabajo realizado con una cosechadora se han cobrado 4480 euros. En la cosechadora han trabajado tres operarios de la siguiente forma: el operario A ha trabajado 14 horas; el operario B, 18 horas, y el operario C, 24 horas. Si hicieron un reparto directamente proporcional a las horas trabajadas, el resultado hubiese sido:

El operario A recibió 1440 €; el operario B, 1120 €, y el operario C, 1920 €	
El operario A recibió 1120 €; el operario B, 1440 €, y el operario C, 1920 €	**X**
El operario A recibió 1120 €; el operario B, 14400 €, y el operario C, 1920 €	

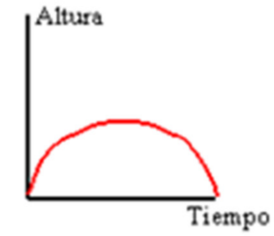
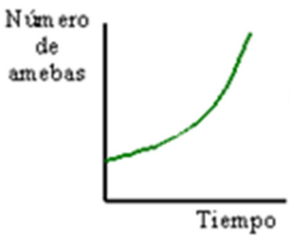
29) Dos camareros de un bar se reparten un bote con 126 euros de propinas, de forma inversamente proporcional al número de días que han faltado. Luis ha faltado 3 días y Pedro, 5 días. ¿Qué cantidad es la que recibirá cada uno?

Decidieron que Luis debía recibir 68 euros, y Pedro 58	**X**
La respuesta correcta sería que Luis debiera recibir 79 euros, y Pedro 47	
O quizás sería mejor que Luis recibiera 78,75 € y Pedro 47,75 €	

30) Indica cuál de las siguientes propuestas es verdadera:

Tres máquinas en 6 horas revelan 750 fotografías. Si ahora disponemos de 7 máquinas trabajando 9 horas, ¿podremos revelar 2800 fotografías?	
Tres grifos iguales llenan un depósito de 10 m^3 en 5 horas. Se estropea un grifo y debemos llenar un depósito de 8 m^3. ¿Podremos hacerlo en 6 horas?	**X**
Con 12 kg de pienso, 9 conejos comen durante 6 días. Si ahora sólo tenemos 8 kg de pienso para 4 conejos, ¿los podremos alimentar durante 10 días?	

31) Las siguientes gráficas muestran la relación entre pares de magnitudes. ¿Cuáles corresponden a una relación directamente proporcional?

☐	 Lanzamiento de una piedra
☐	 Número de amebas en función del tiempo
X	 Aumento de longitud de un muelle, según el peso.